Titulaire : Guillaume Dujardin
Assistants : Hussein Cheikh-Ali et William Hautekiet

Exercices de Calcul Différentiel et Intégral 2 - 2019/2020

Séance 7 - La transformation de Fourier

Rappel. L'espace $L^1(\mathbb{R})$ est défini comme l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ pour lesquelles $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < \infty$. On dénote par $\mathcal{S}$ l'espace de Schwartz (l'ensemble des fonctions rapidement décroissantes).

Définition. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. L'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x}\, dx$$

converge pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. On définit **la transformée de Fourier** de f comme la fonction

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x}\, dx.$$

Théorème. La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un bijection $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ et l'inverse de $\mathcal{F}$ est donné par

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi.$$

Exercice 1. Considérons les fonctions

$$\chi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } x \in [-1/n, 1/n], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Est-ce que $\chi_n \in \mathcal{S}$? Est-ce que $\chi_n \in L^1$? Démontrer que $\mathcal{F}(\chi_n)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}(\xi/n)$ où $\operatorname{sinc}(\xi) = \frac{\sin(\xi)}{\xi}$.
2. Remarquer que $\mathcal{F}(\chi_n) \notin L^1$. Sachant que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \pi,$$

démontrer que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}(\xi/n) \cos(\xi x)\, d\xi = \begin{cases} n/2 & \text{si } x \in]-1/n, 1/n[, \\ n/4 & \text{si } x = \pm 1/n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(En particulier, cette intégrale converge.) Par contre, démontrer que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}(\xi/n) \sin(\xi x)\, d\xi$$

ne converge pas pour $x = \pm 1/n$.

3. Soit $f \in \mathcal{S}$. Démontrer que
$$\chi_n * f \to f$$
uniformément sur $\mathbb{R}$ pour $n \to \infty$.

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{S}$.

1. Calculer $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))$.
2. Vérifier que $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est un opérateur linéaire.
3. Démontrer que $\mathcal{F}^4 = \mathrm{id}_{\mathcal{S}}$.
4. Quelles sont les valeurs propres de $\mathcal{F}$? (Pour trouver des fonctions propres explicites, considérer des expressions de forme $af + b\mathcal{F}(f) + c\mathcal{F}^2(f) + d\mathcal{F}^3(f)$ où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{S}$).

Exercice 3 (Principe d'incertitude). Soit $f \in \mathcal{S}$ telle que
$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = 1.$$

1. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} x \left(f'(x)\overline{f(x)} + f(x)\overline{f'(x)} \right) dx = -1.$$
2. En déduire que
$$\left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \geq \frac{1}{2}.$$
3. Dans quels cas a-t-on égalité ?